f.-m.f.f.d. (PhD) Eshimbetov Muzaffar Reyimbayevich, Toshkent xalqaro moliyaviy boshqaruv va texnologiyalar universitetining "Matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi,
e-mail: mr.eshimbetov@gmail.com, tel: +998-50-101-01-29.

Eshimbetov Jo'rabek Reyimbayevich, Toshkent gumanitar fanlar universitetining "Aniq va gumanitar fanlar" kafedrasi assistant o'qituvchisi, e-mail: eshimbetovjurabek@gmail.com, tel: +998-97-357-08-90.

IQTISODIY MODELLARDA MATRITSALAR VA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING QO'LLANILISHI

Annotatsiya. *Moliyaviy tahlil, aksiyalar bozorini o'rganish, risklarni baholash va investitsiyalarni rejalashtirishda bu metodlar samarali va aniq qarorlar qabul qilish dolzarb hisoblanadi. Mazkur maqolada matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasi kabi chiziqli algebra elementlarining jamiyatda uchraydigan iqtisodiy masalalarni hal qilishda ahamiyati yoritilgan. Ushbu metodlar yordamida iqtisodiy jarayonlar, xususan, iqtisodiy prognozlar, resurslarni taqsimlash va risklarni boshqarish samarali tarzda modellashtiriladi va tahlil qilinadi. Maqolada bunday matematik modellarning amaliy qo'llanilishi bo'yicha misollar keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *Iqtisodiy tizim, sanoat, mahsulot, muvozanat, stoxastik matritsa, kirish-chiqish matritsa, tenglamalar sistemasi.*

Abstract. *In financial analysis, studying the stock market, assessing risks, and planning investments, these methods are crucial for making effective and accurate decisions. This article highlights the importance of elements of linear algebra, such as matrices and systems of linear equations, in solving economic problems encountered in society. Using these methods, economic processes, particularly economic forecasting, resource allocation, and risk management, are effectively modeled and analyzed. The article provides examples of the practical application of such mathematical models.*

Keywords: *Economic system, industry, product, equilibrium, stochastic matrix, input-output matrix, system of equations.*

Аннотация. *В финансовом анализе, изучении фондового рынка, оценке рисков и планировании инвестиций эти методы имеют решающее значение для принятия эффективных и точных решений. В статье подчеркивается важность элементов линейной алгебры, таких как матрицы и системы линейных уравнений, для решения экономических проблем, с которыми сталкивается общество. С помощью этих методов экономические процессы, особенно экономическое прогнозирование, распределение ресурсов и управление рисками, эффективно моделируются и анализируются. В статье приведены примеры практического применения таких математических моделей.*

Ключевые слова: *Экономическая система, отрасль, продукт, равновесие, стохастическая матрица, матрица «затраты-выпуск», система уравнений.*

Kirish. Matritsa tushunchasi qadimgi davrlarga borib taqalasada bu tushuncha birinchi marta 1850 yilda Jeyms Jozef Silvestr tomonidan matritsa deb atalgan. Ular birinchi marta miloddan avvalgi 300 va 200 yillar oralig‘ida Chiu Chang Suan Shu tomonidan Xan sulolasi davrida yozilgan determinantlar va matritsa bilan tenglamalar sistemasini yechish g‘oyasi mavjud bo‘lgan “Matematik san’atning to‘qqiz bobi” deb nomlangan Xitoy yozuvida ishlatilgan. Bobilliklar ham matritsalarni o‘rganishgan, ammo xitoyliklar ularni ko‘proq o‘rganishgan. Xitoyliklar foydalangan matritsa usullaridan biri hozirgi kunda odatda Jardon-Gauss usuli deb nomlanadi.

Matritsalar nazariyasi Gotfrid Leybnits ismli matematik tomonidan ishlab chiqilgan va u birinchilardan bo‘lib chiziqli tenglamalarning koeffitsiyentlaridan foydalangan holda matritsani kiritadi.

Keyinchalik, Karl Gauss 1700 yillarning oxirida matritsa nazariyasini yanada rivojlantirdi. U chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsalar va Jardon-Gauss usullarini kiritdi. Jardon-Gauss usuli 3 yoki undan ko‘p o‘zgaruvchiga ega tenglamalar sistemasini yechish usuli bo‘lib, u matritsaning ko‘plab elementlarini nolga aylantirishni yoki birlik matritsasiga keltirishni o‘z ichiga oladi. Bu esa satr ustida elementar almashtirishlarni bajarish bilan amalga oshiriladi. Bu usul aslida Xitoy yozuvida ham bor edi, lekin Gauss bu usulni yangidan kashf qildi.

So‘ngra, 1850 yilda Jeyms Jozef Silvester lotincha “womb” (ya’ni, qorin) so‘zidan foydalangan holda to‘rtburchakli jadvalga matritsa deb nomi berdi va matritsaning determinantini topish jarayoni bilan nazariyani mustahkamladi. Nihoyat, Jeyms Jozef Silvestrning yaqin do‘sti Artur Keyli ismli matematik matritsalarni qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish kabi amallarini o‘ylab topdi [1-4]. Bundan tashqari, Artur Keyli berilgan matritsaga teskari matritsa topish nazariyasini ham kiritdi va unga aniq ta’rif berdi. So‘ngra, matritsalarni butun songa ko‘paytirish, ya’ni matritsani skalyarga ko‘paytirishni ham kashf etdi.

Materiallar va tadqiqot usullari. 1973 yilda Vasiliy Leontef matematik modellar ustida ishlagani uchun iqtisodiyot bo‘yicha Nobel mukofotiga sazovor bo‘ladi. Vasiliy Leontef shug‘ullangan matematik modeldagi iqtisodiy tizim har bir sanoat mahsulot ishlab chiqargan va bu sanoatlarning har biri boshqa har bir sanoat ishlab chiqargan mahsulotining bir qismidan foydalanadigan bir nechta sanoatlardan iborat bo‘lgan.

Masalan, quyidagicha mulohaza yuritaylik.

Faraz qilaylik, umumiy holda iqtisodiyotda n ta sanoat mavjud bo‘lsin va bu sanoatlarning har biri boshqa har bir sanoat mahsulotining biror qismidan foydalansin deylik (ehtimol hech biridan foydalanmasligi mumkin) [3-4].

Buning uchun birinchi navbatda iqtisodiyot yopiq (ya’ni, hech qanday mahsulot eksport yoki import qilinmaydi) va barcha mahsulot ishlatilgan deb taxmin qilamiz. Berilgan ikkita i va j sanoat uchun a_{ij} orqali j sanoat ishlab chiqargan umumiy yillik mahsulotning i sanoat tomonidan iste’mol qilinish miqdorini belgilaylik. U holda quyida hosil qilingan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa iqtisodiyat uchun kirish-chiqish matritsasi deyiladi.

Ravshanki, barcha i va j uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$0 \le a_{ij} \le 1. \qquad (1)$$

Bundan tashqari, j sanoat ishlab chiqargan barcha mahsulotlar ba’zi sanoat tomonidan foydalanilgan (ya’ni, bu model yopiq). Shuning uchun, har bir j uchun

$$a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{ij} = 1. \qquad (2)$$

Oxirgi shart A matritsaning har bir ustun elementlari yig‘indisi 1 ga teng ekanligini ifodalaydi. (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi A matritsa stoxastik matritsa deb ataladi.

Agar i sanoatning umumiy yillik ishlab chiqarishining narxini p_i orqali belgilasak, u holda i sanoatning yillik daromadi p_i ga teng bo'ladi.

Boshqa tomondan, i sanoat har yili boshqa sanoatlar ishlab chiqargan mahsulotdan foydalanish uchun $a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n$ xarajat qiladi va j sanoat ishlab chiqargan mahsulot uchun tannarx esa $a_{ij}p_j$ ga teng.

Agar har bir $i = 1, 2, ..., n$ uchun

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_n = p_i, \qquad (3)$$

ya'ni, agar yillik xarajatlar har bir sanoat uchun yillik daromadga teng bo'lsa, u holda yopiq iqtisodiy tizim muvozanatda deb ataladi.

Agar $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ deb yozib olsak, u holda (3) tenglamalar sistemasini quyidagicha matritsaviy tenglama ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$Ap = p. \qquad (4)$$

(4) tenglik iqtisodiy tizim uchun muvozanat sharti deb ataladi va p vektor yechimlar esa iqtisodiy tizimning muvozanat narx strukturalari deyiladi.

Oxirgi muvozanat shartini $(E - A)p = q$ ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin, bu yerda E birlik matritsa.

Ma'lumki, bu sistemaning trivial bo'lmagan, ya'ni $p \pi q$ yechimi har doim mavjud bo'ladi. Haqiqatan, $E - A$ matritsaning barcha ustun elementlari yig'indisi 0 ga teng, chunki A stoxastik matritsa. Shuning uchun, $E - A$ matritsani pog'onasimon ko'rinishga keltirganda albatta barcha elementlari 0 bo'lgan satr mavjud bo'ladi.

1-teorema. [2-4] Faraz qilaylik, A ixtiyoriy n-tartibli stoxastik matritsa bo'lsin. U holda elementlari nomanfiy bo'lgan n¥ 1 o'lchamli $p \pi q$ vektor (yoki matritsa) mavjudki, buning uchun $Ap = p$ tenglik o'rinli bo'ladi. Agar A matritsaning barcha elementlari musbat bo'lsa, u holda p matritsaning barcha elementlarini musbat qilib tanlash mumkin.

Natijalar va ularni muhokama qilish. Endi iqtisodiy masalalarni hal qilishda matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalaniladigan ba'zi misollarni keltiramiz.

1-misol. Ma’lumki, jamiyatda uchta asosiy ehtiyoj mavjud bo‘lib, ular oziq-ovqat, uy-joy va kiyim-kechak hisoblanadi. Shuning uchun, biz jamiyatda oziq-ovqat, uy-joy va kiyim-kechak mahsulotlarini ishlab chiqaradigan uchta sanoat qishloq xo‘jaligi, qurilish va tikuvchilik sanoatlarini qaraymiz. Ushbu sanoatlarning har biri quyidagi jadvalga muvofiq ravishda umumiy ishlab chiqarilgan har bir mahsulotning ma’lum bir qismini iste’mol qilsin.

		ISHLAB CHIQARISH		
		Qishloq xo‘jaligi	Qurilish	Tikuvchilik
ISTE’MOL	Qishloq xo‘jaligi	0.4	0.2	0.3
	Qurilish	0.2	0.6	0.4
	Tikuvchilik	0.4	0.2	0.3

Bu ma’lumotlarga tayangan holda har bir sanoat o‘z daromadlari uchun xarajatlarini tenglashtirishi kerak bo‘lgan yillik narxlarni toping.

Yechilishi. Qishloq xo‘jaligi, qurilish va tikuvchilik sanoatlarining umumiy ishlab chiqarish uchun yil boshida o‘zgargan narxlar mos ravishda p_1, p_2 va p_3 ga teng bo‘lsin deylik. Bu narxlar qanday aniqlanishini ko‘rish uchun dastlab, qishloq xo‘jaligi sanoatini qarab chiqaylik. Bu sanoat har yili ishlab chiqarish uchun p_1 narx oladi. Ammo, qishloq xo‘jaligi sanoati masala shartida berilgan jadvalning birinchi satriga ko‘ra, oziq-ovqatning 40 foizi, uy-joy sanoatining 20 foizi va kiyim-kechak sanoatining 30 foizi miqdorida mahsulot iste’mol qiladi. Bundan, qishloq xo‘jaligi sanoatining umumiy xarajatlari $0.4p_1 + 0.2p_2 + 0.3p_3$ ga teng.

Shuning uchun, $0.4p_1 + 0.2p_2 + 0.3p_3 = p_1$ bo‘ladi.

Endi qurilish va tikuvchilik sanoatlari uchun ham shunga o‘xshash tahlil o‘tkazib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 0.4p_1 + 0.2p_2 + 0.3p_3 = p_1, \\ 0.2p_1 + 0.6p_2 + 0.4p_3 = p_2, \\ 0.4p_1 + 0.2p_2 + 0.3p_3 = p_3. \end{cases}$$

Agar $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ belgilashlarni kiritsak, u holda yuqoridagi sistemani $(E - A)p = q$ ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, bu sistemaning yechimini Gauss usuli yordamida topsak, quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$p = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix}, \text{ bu yerda } t \text{ - ixtiyoriy musbat haqiqiy son.}$$

Shunday qilib, qishloq xo'jaligi va tikuvchilik sanoatlarining umumiy ishlab chiqarishlaridagi qiymatlari bir xil bo'lib, bu qiymat qurilish sanoati umumiy ishlab chiqargan qiymatning $\frac{3}{2}$ qismiga teng bo'lishi kerak ekan.

2-misol. Agar bizga iqtisodiy tizim uchun kirish-chiqish matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsa, u holda to'rtta sanoat uchun muvozanat narx strukturalarini toping. Agar biznesning umumiy qiymati 1000 dollarga teng bo'lsa, u holda har bir sanoatning narxini toping.

Yechilishi. Agar $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ muvozanat narx strukturasi bo'lsa, u holda muvozanat shartiga ko'ra $Ap = p$ tenglik o'rinli bo'ladi va bu tenglikni $(E - A)p = q$ ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, bu sistemaning yechimini Gauss usuli yordamida topsak, quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$p = \begin{pmatrix} 4\ 4\ t \\ 3\ 9\ t \\ 5\ 1\ t \\ 4\ 7\ t \end{pmatrix}, \text{ bu yerda } t \text{ - ixtiyoriy musbat haqiqiy son.}$$

Masalaning ikkinchi shartiga ko'ra, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1000$ ekanligidan $t = 5.525$ ga teng bo'lishi kelib chiqadi. Bundan biznesning umumiy qiymati 1000 dollarga teng bo'lganda muvozanat narx strukturalari quyidagicha bo'lar ekan:

$$p = \begin{pmatrix} 243.09 \\ 215.47 \\ 281.76 \\ 259.67 \end{pmatrix}.$$

Xulosa . Maqolada keltirilgan matematik metodlar, xususan, matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasi, iqtisodiy tahlil, aksiyalar bozorini o'rganish, risklarni baholash va investitsiyalarni rejalashtirishda samarali vosita sifatida muhim rol o'ynaydi. Ushbu metodlar yordamida iqtisodiy jarayonlar samarali tarzda modellashtiriladi va tahlil qilinadi. Maqola matematik modellarning amaliy qo'llanilishini ko'rsatib, iqtisodiy masalalarni hal qilishda ularning ahamiyatini ta'kidlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, A. X. Xudoyberdiyev, F. H. Haydarov Algebra va sonllar nazariyasi (o'quv qo'llanma), Toshkent "Tafakkur - bo'stoni" 2019.
2. Peter D. Lax Linear Algebra and Its Applications, 2010.
3. S. Gilbert Linear Algebra and Its Applications, 2011.
4. K. Kutler A First course in linear algebra, Brigham Young University, Libre-Texts 2024.